

größere Schwankungen der Aktivität zu erwarten gewesen. Das bedeutet, daß sicher nur ein kleiner Teil der vorhandenen Aktivität mit dem Niederschlag ausfällt. Weiter zeigt die Messung, daß es möglich ist, zwei verschiedene Luftmassen durch ihren verschiedenen Gehalt an natürlichen radioaktiven Beimengungen zu unterscheiden.

Die Untersuchung wurde mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen von Dauerregistrierungen der Ultrastrahlung durchgeführt, wofür wir auch an dieser Stelle danken möchten. Weiter sind wir dem Institutsdirektor, Herrn Prof. Dr. Gentner, für seine andauernde Förderung der Arbeit zu Dank verpflichtet.

Die innere Dämpfung vorgespannter Medien

Von EDUARD SCHREUER

Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Z. Naturforsch. 8a, 322—328 [1953]; eingegangen am 31. Januar 1953)

Durch die formale Einführung einer Materialvorspannung in die Arbeitsbilanz periodischer Deformationen gelingt es, Frequenz- und Amplitudenabhängigkeit der inneren Dämpfung in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung elementar zu berechnen. Dabei wird nur eine einzige diskrete Relaxationszeit angenommen. Die Vorspannung läßt sich als Oberflächenspannung physikalisch deuten.

Die Zahl der experimentellen Untersuchungen über das Verhalten der inneren Dämpfung von periodisch beanspruchten Werkstoffen aller Art, insbesondere auch der Kunststoffe, bei denen eine offensichtliche Zeitabhängigkeit der elastischen Grundkonstanten vorliegt, ist in den letzten Jahren sehr gewachsen. Sie haben eine verwirrende Fülle von Beobachtungsmaterial geliefert, für das eine einheitliche theoretische Deutung noch nicht gefunden werden konnte. Die gewohnte theoretische Behandlung der Relaxationerscheinungen ergibt für lineare Systeme — sofern ein „Zusammenhaltsmechanismus“ mit einer einzigen diskreten Relaxationszeit zugrunde gelegt ist — über einer logarithmisch geteilten Frequenzachse immer einen S-förmigen Verlauf der Elastizitäts-„Konstanten“ und einen ihm streng zugehörigen glockenförmigen Verlauf der Dämpfung, unabhängig von der Amplitude der Beanspruchung. Die zahlreich zu beobachtenden Abweichungen von diesem als ideal vorgestellten Dämpfungsverhalten werden gewöhnlich auf eine Nichtlinearität der Kraft-Formbeziehung zurückgeführt bzw. der Existenz eines mehr oder weniger verschmierten Spektrums von Relaxationszeiten zugeschrieben.

Die Schwierigkeiten der Deutung experimentell gefundenen Dämpfungsverhaltens haben andererseits Veranlassung gegeben, zu seinem Verständnis mechanische Beispiele heranzuziehen und die

Schwingungseigenschaften von allerlei Modellen und ihren möglichen Kombinationen zu untersuchen¹.

Dennoch konnte es geschehen, daß ein zweifellos einheitlicher physikalischer Vorgang — das Auftreten eines Dämpfungsmaximums über der Temperaturachse — theoretisch nur dadurch befriedigend rekonstruiert werden konnte, daß für die beiden Flanken dieses Maximums zwei grundsätzlich verschiedene Modellvorstellungen zugrunde gelegt wurden².

Im folgenden soll nun versucht werden zu zeigen, daß unter Annahme der einfachen Maxwell-Kuhnschen Vorstellung von der zeitlichen Veränderlichkeit elastischer Grundkonstanten nicht nur die Frequenz- bzw. Temperaturabhängigkeit der inneren Dämpfung befriedigend gedeutet wird, sondern daß auch die Abhängigkeit des Dämpfungsverlaufes von der Amplitude der Beanspruchung in deutlicher Übereinstimmung mit der Erfahrung abgeleitet werden kann.

Dies gelingt nun freilich nur unter einer besonderen Voraussetzung, die in den gebräuchlichen Modellen *nicht* zum Ausdruck kommt: Es müssen in der Arbeitsbilanz des Vorganges neben den zur Deformation benötigten Wechsellasten auch konstante innere oder äußere Materialspannungen, hier Vorspannungen genannt, berücksichtigt werden. Tatsächlich wird es unter dieser Voraussetzung mög-

¹ K. Wolf, Kunststoffe 41, 89 [1951]; E. Klein und E. Jenckel, Z. Naturforsch. 7a, 305 [1952] u. a.

² E. Jenckel u. E. Klein, Z. Naturforsch. 7a, 619 [1952].



lich, die beobachteten Phänomene in elementarer Weise zu beschreiben, und es ergibt sich, daß der als ideal vorgestellte Dämpfungsverlauf den Grenzfall für sehr kleine Beanspruchungen des Mediums darstellt.

1. Die Deutung der Vorspannung

Die genannte Voraussetzung der Existenz von Vorspannungen stellt keinen Verstoß gegen die grundsätzlich zu fordernde Linearität der Kraft-Formbeziehungen dar und läßt sich in jedem Falle begründen.

Bei reinen Kompressionsvorgängen z. B. ist die gegen den (bzw. mit dem) im wesentlichen konstanten Binnendruck³ $P = (\alpha/\kappa) T$ geleistete Volumarbeit ein Maß für die Änderung der inneren Energie. Ihr Äquivalent findet diese Energieänderung nicht etwa in der äußeren Deformationsarbeit, sondern in der Differenz zwischen dieser Arbeit und der latenten Kompressionswärme, die die äußere (in cal gemessene) Deformationsarbeit um Größenordnungen übersteigen kann.

Erst die Mitberücksichtigung dieser inneren Arbeit führt zur richtigen Größe und Frequenzabhängigkeit der sog. thermischen Dämpfung⁴.

Aber auch bei solchen Deformationsvorgängen, bei denen Volumänderungen und zugehörige latente Kompressionswärmen zu vernachlässigen sind, muß eine innere Arbeit berücksichtigt werden in der Weise, daß man die Deformationsspannung als Summe eines konstanten und eines periodischen Gliedes ansetzt; dies ist z. B. dann notwendig, wenn die Deformation von Änderungen der Oberfläche begleitet ist⁵.

Denn solche Deformationen erwecken neben den elastischen (deformationsproportionalen) Gegenkräften auch konstante Gegenkräfte, die von der ihrem Wesen nach konstanten Oberflächenspannung herrühren. Diese konstanten Gegenkräfte pflegt man im allgemeinen zu vernachlässigen. Sie müssen aber merklich werden, wenn die Beanspruchungen klein und die Oberflächen im Vergleich mit dem beanspruchten Querschnitt groß sind; man denke z. B. an eine deh nende oder tordierende Deforma-

tion dünner Materialbänder. Der Einfluß dieser Oberflächenkräfte ist in jüngster Zeit von Schmieder und Wolf⁶ festgestellt worden, die den Torsionsmodul an dünnen Kunststoffbändern untersuchten.

Dieser Einfluß ist nicht mehr überraschend, wenn man bedenkt, daß für die Beurteilung der Oberflächen nicht nur die geometrische Kalkulation von Bedeutung ist. Wir wissen vielmehr, daß die physikalische Oberfläche der festen Körper um vieles größer ist als die augenscheinliche und ferner, daß wir bei den realen Stoffen auch mit nichtidealer Raumerfüllung, d. h. mit der Existenz innerer Oberflächen zu rechnen haben.

Neben der Oberflächenspannung müssen gegebenenfalls auch andere natürlich (z. B. durch Eigengewicht im Schwerfeld) oder künstlich erzeugte Vorspannungen berücksichtigt werden.

Wenn in diesem Zusammenhang von „Konstanz“ der Vorspannungen gesprochen wird, so gilt diese Ausdrucksweise in voller Schärfe nur für solche Vorspannungen, die durch konstante äußere Kräfte, z. B. durch die Schwerkraft, erzeugt werden. Vorspannungen jedoch, die eingepprägten Materialkräften ihr Dasein verdanken, unterliegen natürlich dem zeitlichen Ausgleichsbestreben, das als sog. Nachwirkung für alle elastischen Äußerungen realer Stoffe charakteristisch ist. Wir werden uns im folgenden der naheliegenden Vorstellung bedienen, daß die Kraftwirkungen im Körperinneren und an seiner Oberfläche dem gleichen zeitlichen Nachwirkungsgesetz unterliegen. Eine solche Relaxation der Oberflächenspannung ist für den flüssigen Zustand seit langem bekannt^{6a}.

Die spärlichen in der Literatur zu findenden Angaben über die Oberflächenspannung der Körper im festen Zustand würden nach dieser Vorstellung als die statischen Endwerte dieser Größe zu deuten sein.

2. Die Dispersion der elastischen Konstanten

Nach der Maxwell-Kuhnschen Vorstellung⁷ läßt sich die Zeitabhängigkeit der Elastizitätskonstanten in beliebiger Näherung darstellen durch:

zung der Oberfläche eine Abkühlung des Systems bewirkt; vgl. z. B. Hdb. d. Physik VII S. 393.

⁶ E. Schmieder u. K. Wolf, Physik. Verh. 5, 145 [1951].

^{6a} F. Schmidt u. H. Steyer, Ann. Physik 79, 442 [1926].

⁷ W. Kuhn, Z. physik. Chemie, Abt. B 42, 1 [1939].

³ α = kub. Ausdehnungskoeffizient; κ = kub. Kompressibilität; T = abs. Temperatur. Vgl. z. B. Hdb. d. Physik Bd. IX, S. 454.

⁴ E. Schreuer, Z. Physik 131, 619 [1952].

⁵ Auch diese innere Arbeit hat ihr Äquivalent in einer latenten Wärme, die z. B. bei adiab. Vergröße-

$$E(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\lambda_0}} + \Delta_1 E \cdot e^{-\frac{t}{\lambda_1}} + \dots + \Delta_n E \cdot e^{-\frac{t}{\lambda_n}}. \quad (1)$$

Unter E läßt sich nach Bedarf der Elastizitätsmodul oder der Schubmodul verstehen, die einander proportional sind; die Verknüpfungsgröße, die Poissonsche Querkontraktionszahl μ bleibt nach Untersuchungen von Pulfrich⁸ von den zeitlichen Ausgleichsvorgängen unberührt. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Relaxation dieser Elastizitätskonstanten nicht der Relaxation des Kompressionsmoduls zugeordnet werden darf. Darauf hat Skudrzyk⁹ in einer wichtigen Arbeit aufmerksam gemacht, in der die Folgen der Existenz zweier unabhängiger Reibungskonstanten diskutiert werden.

Wir begnügen uns hier mit der Existenz nur zweier Glieder der in (1) angeführten Reihe und stellen den zeitabhängigen Elastizitätsmodul in erster Näherung dar durch

$$E(t) = E_0 + \Delta E \cdot e^{-kt}, \quad (2)$$

d. h. durch die Summe zweier Teilmoduln, die mit den Relaxationszeiten $\lambda_0 = \infty$ (statischer Anteil) und $\lambda_1 = \eta/G = 1/k$ (Maxwellscher Viskositätsanteil) zeitlich abklingen.

Der zu einem beliebigen Zeitpunkt wirksame Elastizitätsmodul ist von der jeweiligen Deformation und ihrer Änderungsgeschwindigkeit abhängig, und zwar von deren Absolutwerten, da Reibungskräfte zugleich mit der Deformationsrichtung ihr Vorzeichen wechseln. Stellen wir daher für eine harmonisch gedachte Deformation die Zeit als Quotient aus Weg und Geschwindigkeit dar, so läßt sich sofort das zeitliche Mittel des Moduls während einer Periode der Beanspruchung angeben. Wir erhalten somit die Dispersion des wirksamen (dynamischen) Elastizitätsmoduls, d. h. seine Abhängigkeit von der Frequenz. Es ist (T = Schwingungsdauer)¹⁰:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\text{dyn}} &= \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (E_0 + \Delta E \cdot e^{-\frac{k}{\omega} |\lg \omega t|}) dt \\ &= E_0 + \frac{2}{\pi} \Delta E \left(\sin \frac{k}{\omega} \cdot \text{Ci} \frac{k}{\omega} - \cos \frac{k}{\omega} \cdot \left[\text{Si} \frac{k}{\omega} - \frac{\pi}{2} \right] \right). \end{aligned} \quad (3)$$

⁸ C. Pulfrich, Wiedem. Ann. **28**, 87 [1886].

⁹ E. Skudrzyk, Österr. Ing. Arch. **3**, 356 [1949].

Diese Dispersionskurve des dynamischen Elastizitätsmoduls ist in Abb. 1 als Funktion von $\log(k/\omega)$ aufgetragen und zeigt einen S-förmigen Verlauf zwischen dem Maximum $E_0 + \Delta E$ und dem Minimum E_0 . Dispersionskurven solchen Typs werden bekanntlich bei zahlreichen Stoffen beobachtet und verlaufen niemals steiler als die berechnete Kurve.

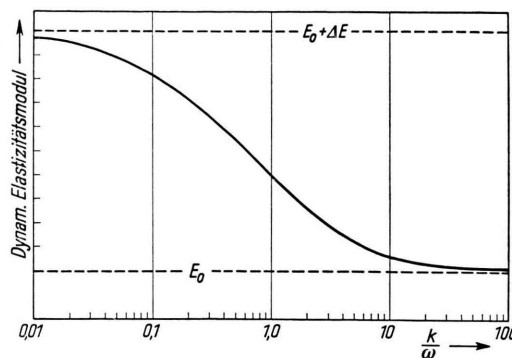


Abb. 1. Frequenzabhängigkeit des dynamischen Elastizitätsmoduls.

Dies hat schon Müller¹¹ festgestellt und experimentell bestätigt. Liegen mehrere diskrete Relaxationszeiten vor, so erhält man durch Superposition resultierende Kurven mit Zwischenstufen. Sinkt eine beobachtete Kurve mit wachsendem k/ω auf beliebig kleine Werte herab, so ist das ein Kennzeichen für *echte* Plastizität und es darf keine Relaxationszeit als ∞ angesehen werden. Diesen Fall wollen wir hier ausschließen.

3. Die innere Dämpfung

Wir wollen nun die Dämpfung berechnen, die dieser Dispersion des Elastizitätsmoduls zuzuordnen ist. Da man jede beliebige Deformation in die Grunddeformationen (Scherung, einseitige Dehnung, allseitige Kompression) zerlegen kann, genügt die Betrachtung einer Grunddeformation, für die wir hier die einseitige Dehnung wählen wollen.

Für die Berechnung der Deformationsarbeit wird die vereinfachende Annahme gemacht, es sei der Querschnitt q_0 unabhängig von der Deformation $\Delta l/l_0$. Die Deformation wird dann wie bei einer erzwungenen Schwingung mit konstanter Amplitude angesetzt, jedoch mit dem Merkmal der inneren Verluste, dem zeitabhängigen Elastizitätsmodul.

¹⁰ Si und Ci = Integralsinus bzw. -cosinus des Argumentes k/ω .

¹¹ F. H. Müller, Kunststoffe **39**, 215 [1949].

Wir identifizieren dann die relativen Arbeitsverluste dieser fiktiven erzwungenen Schwingung mit den relativen Verlusten der frei abklingenden gedämpften Schwingung. Integriert man den relativen Arbeitsverlust über eine halbe Periode, so erhält man die Dämpfung, die dem bekannten Rückprallversuch entspricht. Die Integration über n Perioden ergibt für $n \rightarrow \infty$ den stationären Wert der Dämpfung, da für eine amplitudenkonstante Schwingung gilt

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)_{\text{Stat.}} = \frac{\Sigma \Delta A_n}{A_n}; \quad n \rightarrow \infty.$$

Dabei entspricht A_n ganz allgemein dem Maximalwert der in der n -ten Periode unserer fiktiven Schwingung enthaltenen Energie. Da wir die Amplitude der Schwingung als Konstante vorgegeben haben, ist ihr möglicher Energieinhalt durch den zeitlichen Mittelwert des dynamischen Elastizitätsmoduls in der jeweils betrachteten Periode bestimmt, d. h. für $n \rightarrow 0$ durch den Ausdruck (3), für $n \rightarrow \infty$ dagegen durch den Endwert des Moduls, d. h. durch E_0 . Ist die Dispersionsstufe, der Unterschied zwischen Maximal- und Minimalwert des dynamischen Elastizitätsmoduls, sehr klein, so kann der zeitliche Mittelwert für jedes n durch irgendeinen der Extremalwerte ersetzt werden¹².

Das Arbeitsintegral lautet zunächst:

$$A(l) = \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} q_0 \cdot E(t) \cdot \left(\sigma + \frac{l - l_0}{l_0}\right) dl. \quad (4)$$

Darin ist verabredungsgemäß $E(t) \cdot \sigma$ die Vorspannung, $E(t) \cdot (l - l_0)/l_0$ die deformierende Spannung. Mit Benutzung von (2) und für $l - l_0 = \Delta l \cdot \sin \omega t$ ergibt das Integral den aperiodischen Arbeitsverlust für n Periodendauern T :

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta A_n &= \int_0^{nT} q_0 (E_0 + \Delta E \cdot e^{-kt}) \left(\sigma + \frac{\Delta l}{l_0} \sin \omega t\right) \\ &\quad \cdot \omega \Delta l \cos \omega t dt = (1 - e^{-n \frac{2\pi k}{\omega}}) \\ &\quad \cdot \left[V_0 \sigma \frac{\Delta l}{l_0} \frac{\Delta E}{\omega/k + k/\omega} + \frac{V_0}{4} \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \frac{\Delta E}{1 + \left(\frac{k}{2\omega}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Darin verschwindet für $n \rightarrow \infty$ (stationärer Zustand) der Subtrahend der runden Klammer.

¹² Z. B. bei der thermischen Dämpfung, wo

$$\frac{E_{\text{ad}} - E_{\text{iso}}}{E_{\text{iso}}} \approx \frac{E_{\text{ad}} - E_{\text{iso}}}{E_{\text{ad}}}.$$

Setzen wir diesen Arbeitsverlust ins Verhältnis zum Endwert der Energie, zu $A_{n \rightarrow \infty} = V_0 \sigma (\Delta l/l_0) E_0 + V_0/2 (\Delta l/l_0)^2 \cdot E_0$, so erhalten wir den stationären Dämpfungsdruck

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)_{\text{Stat.}} = \frac{\sigma \cdot F_1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l_0} \cdot F_2}{\sigma + \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l_0}} \quad (6)$$

$$\text{mit } F_1 = \frac{\Delta E}{E_0} \frac{1}{\omega/k + k/\omega}$$

$$\text{und } F_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{2\omega}\right)^2}.$$

Danach ist also die stationäre Dämpfung nicht nur frequenz-, sondern für $\sigma \neq 0$ auch amplitudenabhängig. Für $\Delta l/l_0 \ll \sigma$ ergibt sich für die Dämpfung der Grenzverlauf F_1 , für $\Delta l/l_0 \gg \sigma$ der Verlauf F_2 . Für Zwischenwerte dieses bestimmenden Verhältnisses verteilt sich die Dämpfung nach dem Schlüssel

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)_{\text{Stat.}} = a F_1 + (1 - a) F_2; \quad a = \frac{1}{1 + \frac{\Delta l/l_0}{2\sigma}} \quad (7)$$

auf beide Grenzfunktionen.

In Abb. 2 ist die Dämpfung für die Werte 0; 1; ∞ des Parameters

$\gamma = \frac{\Delta l/l_0}{2\sigma} = \frac{\text{Amplitude der Deformationsspannung}}{2 \times \text{Betrag der Vorspannung}}$
über $\log k/\omega$ aufgetragen.

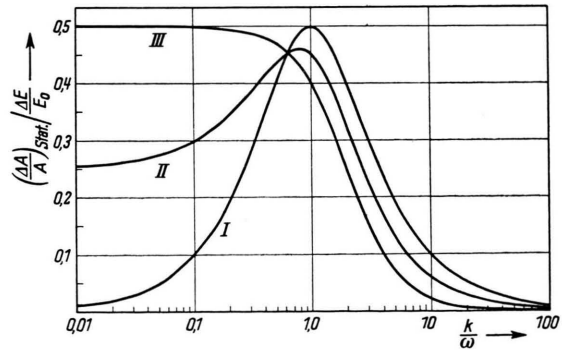


Abb. 2. Frequenzabhängigkeit der stationären inneren Dämpfung für verschiedene Werte des Parameters $\gamma = (\Delta l/l_0)/2\sigma$. I $\gamma \rightarrow 0$; II $\gamma = 1$; III $\gamma \rightarrow \infty$.

Man ist gewöhnt, als Charakteristikum der Relaxationsdämpfung die symmetrische Glockenkurve anzusehen und in der Tat wird bei den gewöhnlich mit sehr kleinen Beanspruchungen ermittelten sta-

tionären Dämpfungen stets ein Verlauf gefunden, der dem Glockentypus der Abb. 2 nahe kommt. Wir werden indessen sehen, daß es Dämpfungsversuche gibt, die den Übergang vom Glockentypus zum S-Typus mit wachsender Beanspruchung deutlich zeigen. Als typischer Fall einer Glockenkurve ist in Abb. 3 eine von Schmieder und Wolf¹³ ermittelte Dämpfungskurve für Torsionsschwingungen einer bandförmigen Kunststoffprobe wiedergegeben. Die zugehörige Dispersionskurve des Torsionsmoduls zeigt den mit Abb. 1 übereinstimmenden S-förmigen Verlauf zwischen nahezu konstanten Extremalwerten.

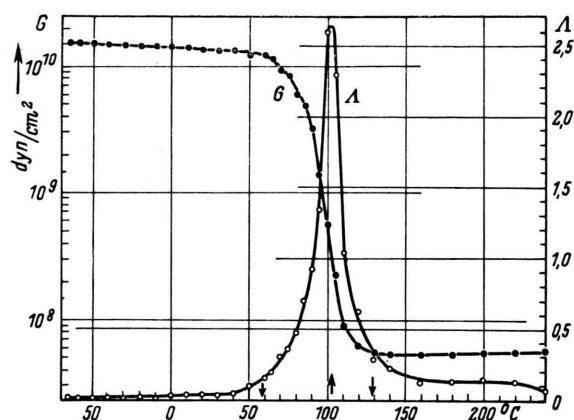


Abb. 3. Torsionsmodul G und Dämpfung A von vernetztem Polyesterharz als Funktion der Temperatur. Entnommen aus¹³.

Man wird hier einwenden können, derartige Messungen dürften nicht zum Vergleich herangezogen werden, da hier die Dispersion als Funktion nicht der Frequenz, sondern der Temperatur ermittelt sei. Indessen sind die experimentellen Schwierigkeiten, Dispersion und Dämpfung über den notwendigen Bereich von mehr als 4 Frequenzdekaden am gleichen Material zu messen derart, daß solche Messungen noch nicht existieren. Man zieht daher oft vor, statt der Frequenz die Relaxationszeit zu variieren, wofür die Temperaturabhängigkeit der Viskosität ein bequemes Mittel an die Hand gibt. Wird bei einem solchen Versuch eine Dispersion der elastischen Konstanten nach Art der Abb. 1 gefunden, so darf man annehmen, daß bei der Temperaturänderung der Zusammenhaltmechanismus als

¹³ K. Schmieder u. K. Wolf, Kolloid-Z. **127**, 65 [1952].

¹⁴ Da man für die Temperaturabhängigkeit der Relaxationszeit in erster Näherung $\lambda = \lambda_0 \cdot \exp(\text{const}/T)$

solcher unbeeinflusst geblieben ist und lediglich die innere Reibung und damit die Relaxationszeit verändert worden sind. Die Temperaturdispersion ist der Frequenzdispersion äquivalent¹⁴, solange keine grundsätzlichen Änderungen des Zusammenhaltmechanismus, etwa durch Plastisch-werden oder Kristallisation der Substanz eintritt.

Wir dürfen daher erwarten, daß sich der Dämpfungsausdruck F_1 auf Abb. 3 anwenden läßt. Für die Maximaldämpfung ergibt sich dann:

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E_0}; \text{ darin ist nach Abb. 3}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} \approx \frac{1500}{5} \text{ zu setzen.}$$

Mit $A_{\max} = \ln \sqrt{1 + (\Delta A/A)_{\max}}$ wird das log. Dämpfungsdekrement $A_{\max} = \ln \sqrt{150} = 2,5$. Der gemessene Wert beträgt 2,65; die Übereinstimmung ist sehr befriedigend, und dies um so mehr, als bei der geringen Anzahl beobachtbarer Schwingungen ein stationär geworden Dekrement noch nicht erwartet werden darf.

4. Die Rückprallelastizität als Sonderfall der inneren Dämpfung

Die Deutung der inneren Dämpfung erfordert beim sog. Rückprallversuch eine modifizierte Rechnung. Der Unterschied liegt nicht, wie zunächst vermutet werden könnte, in der besonderen Form der Stoffbeanspruchung durch den kugelförmigen Stoßkörper; diese Beanspruchung läßt sich, was den Energieumsatz betrifft, grundsätzlich auf eine rein einseitige Dehnung bzw. Stauchung reduzieren. Vielmehr ist es die Einmaligkeit des Stoßvorganges, die dazu zwingt, ihn als einen nichtstationären Prozeß zu betrachten.

Wie oben schon erwähnt, wird diese Dämpfung durch Integration des aperiodischen Verlustes über eine halbe Periode der Anfangsschwingung ermittelt. Dieser Verlust ΔA_0 ist ins Verhältnis zum Maximalwert A_0 der in die Schwingung investierbaren Energie zu setzen. Gemäß unserer oben angeführten Überlegung setzen wir:

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} q_0 \cdot \bar{E}_{\text{dyn}} \left(\sigma + \frac{l - l_0}{l_0} \right) dl \\ &= V_0 \sigma \frac{\Delta l}{l_0} \bar{E}_{\text{dyn}} + \frac{1}{2} V_0 \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 \bar{E}_{\text{dyn}}, \end{aligned}$$

anzunehmen pflegt, entsprechen sich in der Funktionsdarstellung etwa der $\log(\omega/k)$ und die reziproke absolute Temperatur.

wobei \bar{E}_{dyn} durch die Beziehung (3) gegeben ist. Wir erhalten so zunächst die relativen aperiodischen Verluste:

$$\frac{\Delta_1 A}{A_0} = \frac{V_0 \sigma}{A_0} \frac{\Delta l}{l_0} \Delta E \frac{1 + e^{-\frac{k\pi}{\omega}}}{k/\omega + \omega/k}, \quad (8)$$

(d. i. Verlustanteil der Oberflächenenergie) und

$$\frac{\Delta_2 A}{A_0} = \frac{V_0}{A_0} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 \frac{\Delta E}{4} \frac{1 - e^{-\frac{k\pi}{\omega}}}{1 + \left(\frac{k}{2\omega} \right)^2}, \quad (9)$$

(d. i. Verlustanteil der quasielastischen Energie).

$$\text{mit } f_1 = \frac{\Delta E}{\bar{E}_{\text{dyn}}} \frac{1 + e^{-\frac{k\pi}{\omega}}}{\omega/k + k/\omega}$$

$$\text{und } f_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{\bar{E}_{\text{dyn}}} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{k\pi}{\omega}}}{1 + \left(\frac{k}{2\omega} \right)^2}.$$

Dieser Ausdruck geht für $\omega \gg k$ in den Grenzfalle über

$$\left(\frac{\Delta A_0}{A_0} \right)_{\omega \gg k} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \frac{\Delta E}{E_{\text{dyn max}}};$$

Dieser Berechnung liegt nach Voraussetzung eine Schwingung zugrunde, die zur Zeit $t = 0$ keine Elongation, aber volle Deformationsgeschwindigkeit und daher volle kinetische Energie besitzt.

Der Rückprallversuch aber beginnt zur Zeit $t = 0$ mit Elongation und Geschwindigkeit 0, d. h. die Schwingung wird zur Zeit $t = 0$ mit extremer Beschleunigung angestoßen. Der Energiebilanz ist daher noch vor Anwendung des Integrals (5) die Verlustarbeit einer Viertelperiode hinzuzufügen, die geleistet wird während einer Zeit, die klein ist gegen die Dauer einer Viertelperiode und über eine Wegstrecke, die klein ist gegen die volle Elongation. Die Korrektur betrifft demnach nur den Anteil (9), da die Beschleunigungsarbeit wegen der verschwindenden Elongation nicht gegen die Oberflächenkräfte zu leisten ist.

Da das Integral (5) für $t = 0$ bis auf die Integrationskonstante den Energieinhalt des Systems darstellt, ermittelt man den gesuchten Teilverlust leicht zu

$$-\frac{V_0}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E}{1 + \left(\frac{k}{2\omega} \right)^2}.$$

Damit wird, wenn man wie gewöhnlich nur die Absolutbeträge der Verluste wertet,

$$\frac{\Delta A_0}{A_0} = \frac{|\Delta_1 A| + |\Delta_2 A|}{A_0} = \frac{\sigma \cdot f_1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l_0} \cdot f_2}{\sigma + \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l_0}} \quad (10)$$

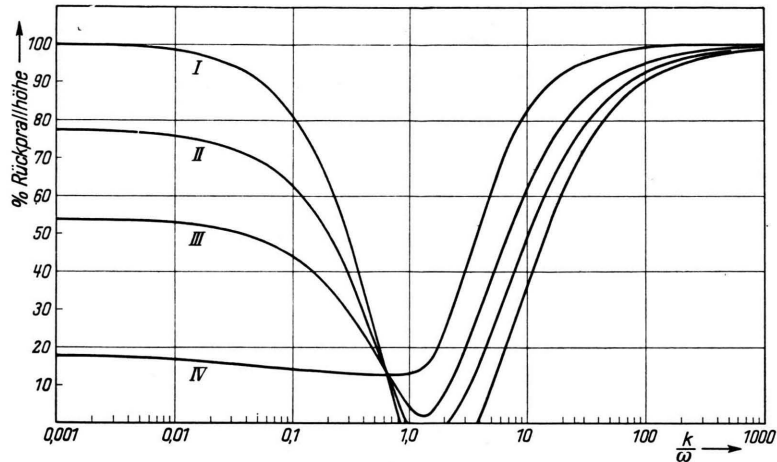


Abb. 4. Frequenzabhängigkeit der Rückpralldämpfung als Funktion des Parameters $\gamma = (\Delta l / l_0) / 2\sigma$. I $\gamma \rightarrow 0$; II $\gamma = 1/3$; III $\gamma = 1$; IV $\gamma = 10$.

er gilt für alle Rückprallversuche, bei denen die Stoßdauer als sehr klein gegenüber der Relaxationszeit des Materials angesehen werden darf. Vgl. dazu auch¹⁵, wo die derart berechneten Rückprallelastizitäten in sehr guter Übereinstimmung mit Meßwerten gefunden wurden.

Das Ergebnis (10) entspricht formal dem für die stationäre Dämpfung erhaltenen und zeigt die gleiche Abhängigkeit von der Amplitude. Jedoch ist seine Frequenzabhängigkeit in charakteristischer Weise verändert. Das Ergebnis von Rückprallversuchen wird gewöhnlich in der Form Rückprallhöhe/Fallhöhe = $1 - \Delta A_0 / A_0$ angegeben. In der Abb. 4 ist daher die Frequenz- und Amplitudenabhängigkeit der Rückpralldämpfung in der gleichen Form dargestellt. Die Werte des Parameters $\gamma = (\Delta l / l_0) / 2\sigma$ wurden zu 0; 1/3; 1; 10 gewählt. Für die Dispersionsstufe wurde $\Delta E = 10E_0$ ange-

¹⁵ E. Schreuer, Kolloid-Z. 129, 123 [1952].

nommen; diese Größenordnung wird bei zahlreichen Kunststoffen zutreffen. Verschwindende Werte der Rückprallhöhe entsprechen — darauf haben Jenckel und Klein² aufmerksam gemacht — dem aperiodischen Grenzfall der Schwingungsdämpfung.

Da bei Fall- oder Stoßversuchen die Frequenz des Vorganges durch die Stoßzeit (Berührungszeit) charakterisiert ist, diese aber in weiten Grenzen zu ändern technisch äußerst schwierig ist, kann ein Vergleich unserer Rechnung mit experimentellen Ergebnissen wiederum nur auf dem Umweg über die bequemer zugängliche Temperaturabhängigkeit geführt werden. Dabei darf eine quantitative Übereinstimmung natürlich nicht erwartet werden. Unsere Rechnung soll nur die Dispersionsverluste, nicht aber die unvermeidlichen Zusatzverluste erfassen, die auf andere Weise den Energievorrat verkleinern.

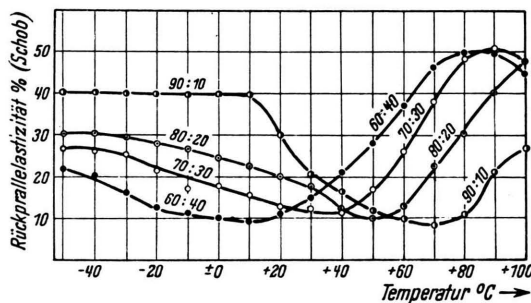


Abb. 5. Rückprallelastizität – Temperaturkurven von Polyvinylchlorid. Einfluß des Weichmachergehaltes (10–40%). Entnommen aus ¹⁶.

Untersuchungen der Temperaturabhängigkeit der Rückpralldämpfung hat insbesondere Stöcklin¹⁶ für zahlreiche Stoffe mit dem Schobschen Stoßpendel durchgeführt. Die relativ sehr hohe spezifische Beanspruchung des Stoffes bei diesem Versuch läßt erwarten, daß hierbei niemals eine Glockenkurve gemäß Beispiel 1 unserer Abb. 4 beobachtet wird. In der Tat weisen sämtliche von Stöcklin beobachteten Kurven einen Habitus auf, der den Beispielen 2–4 entspricht. Dafür gibt die Abb. 5 ein Zeugnis, in der der Einfluß eines Weichmachers auf die Rückprallelastizität dargestellt

¹⁶ P. Stöcklin, Kautschuk 18, 151 [1942]; 19, 3 [1943].

ist. Nach unseren Ergebnissen sind die Kurven so zu deuten, daß der Weichmacher nicht nur die innere Reibung herabsetzt und dadurch das Dämpfungsmaximum auf der Temperaturachse verschiebt, sondern auch den Parameter γ verändert, der den Einfluß der Oberflächenspannung charakterisiert.

Dem Verf. ist bisher nur ein einziger Fall bekannt geworden, bei dem die Masse des Stoßkörpers und damit die Beanspruchungsamplitude bei sonst gleichen Versuchsbedingungen variiert worden sind; diese Untersuchung stammt von Jenckel und Klein². Ihr Ergebnis ist in der Abb. 6 dargestellt und bestätigt in überzeugender Weise die Aussagen der hier durchgeführten elementaren Rechnung: mit wachsender Beanspruchungsamplitude geht bei ein und demselben Versuchskörper der Dämpfungsverlauf vom Glockentyp zum S-Typ über.

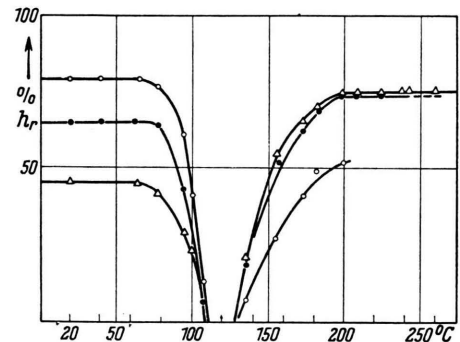


Abb. 6. Die Rücksprunghöhe in Abhängigkeit von der Temperatur für verschiedene Kugelmassen bei 10,7% vernetztem Polystyrol. Kugelgewicht 0,13 pd (O); 1,4 pd (●); 4,06 pd (Δ). Entnommen aus ².

Nachdem solcherart deutlich geworden ist, daß je nach der spezifischen Beanspruchung des Stoffes auch für eine einzige diskrete Relaxationszeit Dämpfungsverläufe sehr unterschiedlichen Charakters erwartet werden müssen, darf man erwarten, daß der Spielraum der Relaxationszeiten, den man bisher anzunehmen gezwungen war, erheblich eingeschränkt werden kann.

Die hier gefundenen Zusammenhänge scheinen darüber hinaus ein neues Verständnis des unterschiedlichen Dämpfungsverhaltens zu geben, das man seit langem an Werkstoffen kennt, die je nach ihrer thermischen Vorbehandlung als reich oder als arm an inneren Spannungen anzusehen sind.